

גיאומטריה פנים רבות לה

מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה

עורכות: אילנה לבנברג ודורית פטקין

The many aspects of geometry – From research to practice in geometry teaching

Editors: Prof. Ilana Levenberg and Prof. Dorit Patkin

עורכות: **פרופ' אילנה לבנברג**, המכללה האקדמית גורדון
פרופ' דורית פטקין, מכללת סמינר הקיבוצים

הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:
עורכת ראשית: **ד"ר יהודית שטיימן**
עורכת טקסט ולשון: **מיכל קירזנר**
עורכת לשון אחראית: **מירב כהן-דר**
עורכת גרפית: **מרב גוטליב**
מעצבת העטיפה: **אורית לידרמן**

צילום תמונת העטיפה: **שי קירזנר**

תמונות השערים והכריכה

כריכת הספר - צילם שי קירזנר
שער א - צילמה שרה גזית
שער ב - צילם שי קירזנר
שער ג - צילם שי קירזנר
שער ד - צילם שי קירזנר
שער ה - צייר אייל אפלבוים

מסת"ב: 3-153-530-965-978

© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת, תשע"ח/2018

טל': 03-6901406 <http://www.mofet.macam.ac.il>

דפוס: אופסט טל בע"מ

תודות

נבקש להודות לכל אלה אשר סייעו לנו בהוצאת ספר זה.

תודות לפרופ' שלמה וינר ולד"ר אלכס קופרמן, שקראו, העירו והאירו, ותודה לכל כותבי המחקרים שלקחו חלק בספר זה.

לעושים במלאכה מטעם הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, ובראשם לד"ר יהודית שטיימן, ראש הוצאת הספרים והעורכת הראשית, שנתנה חסות להוצאת הספר; למיכל קירזנר-אפלבוים, העורכת הלשונית, שהשקיעה מחשבה ודאגה בכל פרט ופרט, מן העיצוב המילולי ועד לעיצוב החזותי של הספר; ולחני שושתרי, רכזת הוצאת הספרים, שחיברה בין כל הגורמים השותפים וטיפלה בכל אחד משלבי הוצאת הספר.

תודה למרב גוטליב על העיצוב הגרפי המוקפד של הספר.

אחרונים חביבים, כל היוצרים במכחול ובצילום שתרמו את יצירותיהם לתפארתו של הספר: הצייר אייל אפלבוים והצלמים שרה גזית ושי קירזנר.

תוכן עניינים

פתח דבר: מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה 7

שער א: הוראה ולמידה של גיאומטריה בגן הילדים

- 1 צוהר לגיאומטריה בגיל הרך: חשיבות העיסוק בגיאומטריה, תובנות
גיאומטריות של ילדים והכשרת גננות / **צביה מרקוביץ** 19
- 2 יחס ואמונות כלפי גיאומטריה וידע תוכן לגבי צורות וגופים בקרב גננות /
צביה מרקוביץ ודורית פטקין 51

שער ב: "רואים" גיאומטריה

- 3 "לראות במחשבה": שילוב אנליטי-ויזואלי בביצוע פעילויות בגופים /
ניצה כהן 81
- 4 פיתוח כישורים מרחביים באמצעות אימון ביצירת דימוי מנטלי של גופי
סיבוב / **דורית פטקין, עטרה שריקי ורותי ברקאי** 114

שער ג: הקשיים בלמידת הגיאומטריה ובהוראתה והכלים להתמודדות

- 5 שאלון ואן הילה מורחב ככלי למיפוי ידע והבנה בגיאומטריה של המישור
והמרחב / **דורית פטקין** 139
- 6 שני מורים - שאלה אחת בגיאומטריה / **אילנה לבנברג** 166
- 7 השפעת עיצוב המטלות וסביבת הלמידה על המעבר מהצדקות
אינטואיטיביות ויזואליות לשימוש בטיעונים לוגיים דדוקטיביים /
נעמי פרוסק 196
- 8 שאלות נכון/לא נכון בגיאומטריה ככלי לחשיפת ההבנה של הלומדים /
שולה וייסמן 227
- 9 בין חרדה להערכה: עמדות של מתכשרים להוראה כלפי מקצוע
הגיאומטריה / **שירן חוף ואילנה לבנברג** 239

שער ד: לימודי גיאומטריה משולבי סביבה טכנולוגית

- 10 טכנולוגיה ממוחשבת ככלי לגילוי תכונות גיאומטריות מפתיעות של שימור והכללה / **רות סגל ומשה סטופל** 267
- 11 רעיון השימור בגיאומטריה: היסטוריה ארוכת טווח והשלכות עדכניות ללמידה / **איליה סיניצקי ומשה סטופל** 282
- 12 מעבֵר לאוקלידס: פרקטלים כמקור לפעילויות חקר בגיאומטריה / **ליאורה נוטוב ועטרה שריקי** 305

שער ה: יופייה של הגיאומטריה

- 13 אתנו-מתמטיקה וחינוך לרב-תרבותיות: ניתוח אורנמנטים גיאומטריים ובנייתם / **ח'רייה מסארוה, איגור ורנר ודאוד בשותי** 355
- 14 מקילוף קלמנטנה לעיבוד תמונה: איך להמיר את הפחד מגיאומטריה בהכרה בחשיבותה וביופייה? / **אלי אפלבוים** 367
- 389 סיומו של ספר
- 390 על המחברים
- 393 תקצירים באנגלית

פתח דבר

מן המחקר אל המעשה בהוראת הגיאומטריה

אפשר לומר שהגיאומטריה היא המדע האלמנטרי ביותר מבין המדעים שמאפשרים לאדם לגבש תחזיות (על סמך תצפיות) לגבי המבנה הפיזי של העולם, באמצעות תהליכי מחשבה טהורים. כוחה של הגיאומטריה, מבחינת נכונות המסקנות הללו והתועלת שבהן, הנו מעורר התפעלות, והוא משמש כמניע רב-עוצמה לחקר הלוגיקה שבגיאומטריה¹.

הרולד סקוט מקדונלד קוקסטר
H. M. S. Coxeter (1907-2003)

עולם שלם, מורכב, רבגוני ומרתק, מסתתר מאחורי ההגדרה המילונית של הגיאומטריה כ"ענף במדעי המתמטיקה העוסק במדידה ובקביעת יחסים בין קווים, זוויות, שטחים, גופים וכיוצא בהם" (אבן-שושן, 1993: 170). לא בכדי נחשב תחום זה לאחד המרכזיים והחשובים שבענפי המתמטיקה בפרט ובתחומי הדעת בכלל. הגיאומטריה היא תחום דעת שנבנה במהלך אלפיים וחמש מאות שנים, ועדיין נבחן ונבדק שוב ושוב מחדש, מכל זווית, תרתי משמע. אבותיה הראשונים של הגיאומטריה, כמו תאלס היווני (624-547 לפני הספירה), שהחל בניסוחם של משפטים ונימוקים לוגיים, וממשיכו אוקלידס בסוף המאה הרביעית לפני הספירה, עם ספרו **יסודות**, לא הפסיקו ללמוד ולחדש, וכך גם רבים אחרים לאורך הדורות.

חשיבותה של הגיאומטריה אינה מוטלת בספק. ברוך בן יהודה (1960: 302), מבכירי המורים למתמטיקה ומחברם של ספרי לימוד רבים, כתב כי "הגיאומטריה משמשת דוגמה לארגון חומר לימוד בדרך אקסיומטית, דדוקטיבית והגיונית למופת, לכל שאר תחומי המתמטיקה". הגיאומטריה מהווה תשתית לתחומי המדע והטכנולוגיה, שנחשבים כיום כמקצועות מובילים, ולעתים קרובות היא נדרשת גם בחיי היום-יום. כמו כן, הגיאומטריה היא חלק נכבד ממקצוע המתמטיקה שבודק את התאמתם של תלמידים ללימודים גבוהים. התכנים הגיאומטריים מהווים מרכיב חשוב במבחנים הבין-לאומיים ומשמשים כמדד השוואתי לרמת הלימוד במדינות שונות (Chacon, 2003).

לאור האמור לעיל, אין זה מפתיע שהגיאומטריה נלמדת החל מגן הילדים, לאורך כל שנות הלימוד בבית הספר היסודי, בחטיבת הביניים ובבית הספר התיכון וכן במוסדות להשכלה גבוהה ובמכללות להכשרת מורים. המושגים ההנדסיים הבסיסיים מוקנים ונבנים

1 נדלה מתוך http://www.gogeometry.com/math_geometry_quotes/coxeter_math.html

2 בספר זה נעסוק בעיקר בגיאומטריה אוקלידית, שנלמדת בבית הספר היסודי ובתיכון.

כבר בשנים הראשונות של גן הילדים ומתווים את היסודות להבנת המקצוע ואת היחס אליו במהלך כל שנות הלימוד.

במקביל להערכה הרבה כלפי הגיאומטריה ולהכרה בחשיבותה, יש לציין כי היא נחשבת למקצוע קשה גם ללומדים וגם למלמדים אותו. המאה ה-21, עתירת הטכנולוגיה והקדמה, לא שינתה תפיסה זו. תלמידים ומורים כאחד סבורים שזהו מקצוע לימוד שרמת הדרישות בו גבוהה, ושהוא מתאים אך ורק לתלמידים יחידי סגולה, בעלי יכולת מיוחדת או כישרון מולד (Leal, 2007).

בשלהי שנות החמישים של המאה ה-20 פרסמו בני הזוג פייר ואן הילה ודינה ואן הילה-גלדוף, צמד מתמטיקאים הולנדים, תאוריה שפיתחו בניסיון להסביר את הקשיים הרבים של תלמידים בחשיבה בגיאומטריה. בני הזוג ואן הילה התייחסו בתאוריה שלהם לגיאומטריית המישור בלבד. הם מנו חמש רמות חשיבה בסדר היררכי, אך כיום מקובל להתייחס לארבע רמות בלבד: שלב ההבחנה - השלב החזותי (ויזואלי); שלב הניתוח - שלב התיאור; שלב הסידור - שלב המסקנה הבלתי-פורמלית; ושלב ההיקש, המסקנה והדיוק - שלב המסקנה הפורמלית (Gutierrez, 1992; Van Hiele, 1987, 1999). על פי תאוריית ואן הילה, ההתפתחות וההתקדמות בחשיבה הגיאומטרית אינן תלויות בגיל הלומד אלא בהוראה.

במחקרים שונים אכן נמצא שלתלמידים בכל גיל יש קשיים בגיאומטריה. קשיים בזהויות צורות גיאומטריות ובהכרת תכונותיהן מתעוררים כבר אצל תלמידים צעירים, וכן אצל חלק מהלומדים הבוגרים ואף אצל מורים בפועל (ברקאי ופטקין, 2014; Clements & Battista, 1992; Koester, 2003). פנדיסיו ונייט (Pandiscio & Knight, 2011), אשר בחנו את רמת ההבנה של פרחי הוראה על פי תאוריית ואן הילה, מתארים תמונה מאוד לא אופטימית לגבי הידע שלהם בטרם החלו את הקורס בגיאומטריה, ואינם מציגים שיפור ניכר גם לאחר הלמידה.

הקשיים הבולטים שזוהו אצל לומדים הם בתחום הגיאומטריה של המרחב (Koester, 2003; Patkin & Dayan, 2013; Sarfaty & Patkin, 2013). כך למשל, מחקר שנערך בנושא גיאומטריה וחשיבה מרחבית בקרב ילדים בגני ילדים ובבתי ספר יסודיים ובחן יכולת ביצוע של אותה משימה, מצא כי למרות הפער הגילי שהפריד בין הנבדקים הצעירים (ילדי הגן) לנבדקים הבוגרים (ילדי כיתה ו'), לא נמצאו הבדלים ניכרים ביכולת הביצוע של אותן המשימות ובציונים שהתקבלו (Clements & Battista, 1992).

ארגון מורי המתמטיקה בארצות הברית (NCTM: The National Council of Teachers of Mathematics), אשר הגדיר סטנדרטים בהוראת מתמטיקה (NCTM, 2000), מציין מה תלמידים בגילים שונים, מן הגן ועד כיתה י"ב, צריכים לדעת בתחום הגיאומטריה. סטנדרטים אלה מאפשרים למורה להתאים את חומר הלימוד לגיל הלומד ולכלול בו את כל המיומנויות הנדרשות בחשיבה הגיאומטרית. המסמך מציין שתכניות ההוראה הללו צריכות לעמוד לנגד עיניו של המורה המלמד, כדי שתלמידים ידעו "לנתח מאפיינים

ותכונות של צורות גיאומטריות דו-ממדיות ותלת-ממדיות ולפתח נימוקים מתמטיים על אודות יחסים גיאומטריים" (שם: 96). בהתאם לכך, בלימודי הגיאומטריה מושם דגש על פיתוח תפיסה חזותית במישור ובמרחב ועל פיתוח דרכי חשיבה שאופייניות לתחום דעת זה. זאת כדי שבשלב הבאים של לימודי הגיאומטריה יוכלו התלמידים להעלות השערות, לבצע הכללות, להציג הנמקות ולהסיק מסקנות. מרי קראולי (Crowley, 1987) הראתה במחקרה בנושא חשיבה גיאומטרית במישור שכדי לקדם למידה משמעותית, חייבת להיות התאמה מלאה בין רמת ההבנה של הלומדים לבין רמת המשימות שהם מתמודדים עמן. לימוד גיאומטריה כרוך כבר מן השלבים הראשונים בייצוג חזותי (ויזואליזציה). יכולת חזותית נדרשת כבר בשלב הראשון מתוך רמות החשיבה של ואן הילה. לא פלא אפוא שתלמידים שיכולתם החזותית אינה מפותחת די הצורך, מתקשים בלימודי הגיאומטריה וזקוקים לפיתוח יכולת זו כתנאי להצלחתם בהמשך. השימוש במהלך ההוראה בייצוגים חזותיים מכל הסוגים, כגון תמונות, מצגות וסרטים, שמראים את הגיאומטריה בסביבתו של התלמיד, הוא גשר מן הממשי למופשט. ייצוגים אלה צדים את חוש הראייה, מגבירים את המודעות לאסתטיקה ומהווים כלי עזר להבנת תפקידיה של הגיאומטריה בחיינו. מכאן שיש לעודד את המורים להשתמש בייצוגים חזותיים. עם זאת, חשוב להדגיש שלשם כך לא נדרשת בהכרח הכנה מיוחדת של עזרים. מרבית הצורות הגיאומטריות הבסיסיות הופיעו בטבע כבר לפני עידן ועידנים, ויצירותיו של האדם הן רק בבחינת חיקוי. כל פריט סביבנו יכול לשמש כאמצעי המחשה לנושא הנלמד. כפי שיודגם בספר זה, גם כדורגל או תפוז יכולים להיות תחילתו של שיעור מרתק. הכול תלוי במידת הדמיון והיצירתיות של המורה שרוצה לעורר עניין ולשפר את הבנת תלמידיה בגיאומטריה ואת הישגיהם. במישור הרחב יותר, שילוב יישומי הגיאומטריה ושימושיה במהלך ההוראה עשוי לפתח את היכולת החזותית של הלומדת (Levenberg & Patkin, 2014), וכתוצאה מכך לשפר את ההבנה של הלומדת, להגדיל את יכולתה המתמטית בכלל ואת יכולתה בפתרון בעיות מתמטיות בפרט ואף לחולל שינוי לטובה בעמדותיה כלפי המקצוע.

דרך נוספת להגברת המוטיבציה של התלמידים ללמידה היא שימוש בכלים טכנולוגיים. המאה ה-21 מתאפיינת בהחדרה מואצת של עזרים טכנולוגיים, בהוראה בכלל ובמתמטיקה בפרט. על אנשי החינוך לדעת להשתמש בכלים אלה באופן נכון וראוי. סביבה עתירת טכנולוגיה מחזקת את הערך של מטלות הלמידה, את משמעות התכנים הנלמדים ואת התפתחות החשיבה הגיאומטרית. במחקר שערכו רוזן וסולומון (Rozen & Solomon, 2007) בבתי ספר יסודיים, נמצא שלמידה בסביבה טכנולוגית יעילה מאוד בהשגת מטרות אלו. מכאן שהשילוב של כלים טכנולוגיים בהוראת הגיאומטריה חשוב ואף מבטיח לזמן לתלמידים למידה חווייתית ומשמעותית. התלמידים שמתנסים בלמידת המקצוע בסביבה טכנולוגית, יזכו להבנה טובה יותר של המושגים והתכנים הנלמדים, כנדרש במקצוע שמשלב שפת סמלים וצורות.

מתוך מטרה להמחיש לקוראים את חשיבות לימודי הגיאומטריה ולסייע למורים ולתלמידים כאחד להתמודד עם אחד מתחומי הדעת הקשים והמאתגרים שידעה האנושות מאז ומתמיד, ספר זה מציג מחקר ומעשה בהוראת הגיאומטריה. אסופת המאמרים מלמדת על פניה המגוונות של הגיאומטריה ועל אפשרויות היישום של נושאים גיאומטריים בהכשרת מורים ובהוראה בבתי הספר. בספר מוצג הקשר בין התכנים בגיאומטריה שנלמדים בגילים השונים לבין דרכי הוראתם, ומוצגים הקשיים בלימודי הגיאומטריה בכל שכבות הגיל, כדי להכירם ולסייע הן למורים בפועל והן למתכשרים להוראת המקצוע להתגבר עליהם. שילבנו גם מאמרים שעוסקים בגישות ההוראה החדשות של המאה ה-21, בדגש על השימוש בכלים טכנולוגיים לקידום ולפיתוח החשיבה הגיאומטרית. יותר מכול, רצינו לחזק את המודעות לחשיבות המרכיב המחקרי ותרומתו לפיתוח החשיבה באמצעות לימודי הגיאומטריה, בקרב כל העוסקים בהוראתה.

בספר חמישה שערים, שכל אחד מהם נוגע בהיבט אחר של הגיאומטריה. **השער הראשון** עוסק בהוראה ולמידה של הגיאומטריה בגן הילדים. צביה מרקוביץ פותחת לנו את הצוהר ללימודי המקצוע בגיל הרך. במאמרה מתוארת הציפייה ממסיימי הלימודים בגן לרכוש ידע לא מועט בגיאומטריה, ומוצגות התובנות של ילדים צעירים בתחום. לשם מימוש ציפייה זו דרושים הכשרה מתאימה של הסטודנטים להוראה ופיתוח מקצועי של הגננות בפועל.

במאמר השני בדקו צביה מרקוביץ ודורית פטקין את היחס כלפי מקצוע הגיאומטריה בקרב גננות. כמו כן נבחן ידע התוכן לגבי צורות וגופים והידע התוכני-פדגוגי בהקשר של דיוק בשפה המתמטית. ממצאי המחקר מציגים את הפער בין המודעות של הגננות לחשיבות העיסוק בגיאומטריה בגן הילדים לבין הידע שלהן בפועל. אפשר לראות שהתמונה אינה מחמיאה ואינה מבשרת טובות לגבי הידע בגיאומטריה של דור העתיד. "ראייה אינה הוכחה", כך אנו מצהירים ומדגישים, בעיקר בלימודי הגיאומטריה. ייתכן למשל ששני משולשים ייראו בעינינו אותו הדבר, אולם אין להסיק מכך שהם חופפים. **השער השני** אמנם נקרא "רואים" גיאומטריה, אבל הוא עוסק ב"ראייה מחשבתית". ניצה כהן מציגה במחקרה "לראות במחשבה" שילוב אנליטי-ויזואלי בביצוע פעילויות בגופים. היא מתבססת על כך שבין יצירת תמונות מנטליות לבין חשיבה אנליטית יש קשר דו-כיווני של הפריה הדדית. לשילוב האנליטי-ויזואלי או להיעדרו יש השפעה מכרעת על יכולת הביצוע של משימות גיאומטריות הן במישור והן במרחב. שילוב לא מספק בין הפן החזותי לפן האנליטי מוביל לעתים קרובות לקשיים ולתפיסות שגויות או לידע חלקי בלבד של מושגים. אחת המסקנות מן המחקר היא שכדי להקנות לתלמידים יכולת של דימוי חזותי עשיר של מושגים במרחב, שיכלול גם דוגמאות שאינן "אבטיפוסיות", חשוב לזמן להם פעילויות המכוונות לכך ולהרגילם ל"גמישות אקטיבית".

גם מאמרן של דורית פטקין, עטרה שריקי ורותי ברקאי עוסק בחשיבות של תפיסה מרחבית. המאמר עוסק בפיתוח כישורים מרחביים באמצעות אימון ליצירת דימוי מנטלי של גופי סיבוב, ומוצגות בו פעילויות שמתאימות לצורך פיתוח המיומנות של סיבוב מנטלי. גופי סיבוב הם גופים שנוצרים באמצעות סיבוב של משטח מישורי מסביב לישר (ציר הסיבוב) שנמצא באותו מישור. הכותבות בחרו להתמקד בפעילויות הקשורות לגופי סיבוב לנוכח העובדה שכמעט אין בנמצא פעילויות הקשורות לכך, אף על פי שגופי סיבוב הם חלק מתכנית הלימודים בגן ובבית הספר.

השער השלישי מציג את הנושא המורכב של הוראת הגיאומטריה, והוא כולל חמישה מאמרים שעוסקים בקשיים בלמידה ובהוראה ובכלים להתמודדות עם קשיים אלה. במאמר הראשון בשער זה מוצג שאלון ואן הילה מורחב (GVH - Global Van Hiele) שחיברה דורית פטקין, ותפקידו לשמש ככלי למיפוי ידע והבנה בגיאומטריה של המישור והמרחב. בעזרת כלי זה אפשר לאתר את מידת השליטה של המשיבים בשלוש הרמות הראשונות של החשיבה הגיאומטרית, בנושאים מרכזיים שנלמדים בחינוך העל-יסודי. השאלון יכול לשמש מורי-מורים לבדיקת הידע המוקדם של מועמדים או מתכשרים להוראת המתמטיקה. כמו כן, הוא יכול לשמש מורים למתמטיקה בבתי ספר תיכוניים שמעוניינים לחשוף את תלמידיהם לשאלות מסוג רב-ברירה בגיאומטריה.

גם המאמר השני בשער זה, של אילנה לבנברג, מציע "כלי". הפעם מדובר בכלי גרפי שמאפשר מיפוי של השיח הכיתתי על כל מרכיביו. המאמר מציג שני מורים שמלמדים את אותה בעיה בגיאומטריה. בעזרת הכלי הגרפי אפשר לזהות במדויק את דפוס האינטראקציה בכיתה, את תבניות השיח ואת אופי התכנים המתמטיים הנלמדים. כל אלה מאפשרים לצייר תמונה מרחבית של כלל השיח המתנהל בשיעור. בהשוואה בין שני המורים היה ניתן להבחין בהבדל באופן שבו הם הובילו את הכיתה והנחו אותה כיצד לגשת לפתרון הבעיה בגיאומטריה. אולם שליטתם הבלעדית של שני המורים על דפוס השיח הכיתתי לא הותירה די זמן לשיח מתמטי מעמיק.

במאמר השלישי, של נעמי פרוסק, שגם הוא עוסק בשיח, מוצג המעבר משימוש בהנמקה אינטואיטיבית וויזואלית לשימוש בהנמקה לוגית דדוקטיבית בפעילות טיעונית, באמצעות עיצוב המטלות וסביבת הלמידה. עיצוב מובנה זה נשען על שלושה עקרונות: (א) יצירת קונפליקט; (ב) יצירת מצבי שיתוף; (ג) הימצאותו של כלי לבדיקת השערות. המאמר מציג חקר מקרה של שני סטודנטים שמעורבים בשיח טיעוני עשיר. הוא מדגים כיצד תכנון הבעיה יצר קונפליקט סוציו-קוגניטיבי ועודד העלאת השערות ובדיקתן באמצעות ה"כלי לבדיקת השערות", במקרה זה התוכנה הדינמית. הנבדקים הצליחו ליישב את הקונפליקט שחוו תוך כדי מעבר משימוש בנימוקים אינטואיטיביים וויזואליים לארגומנטציה שנתמכת בטיעונים לוגיים דדוקטיביים.

גם המאמר הרביעי עוסק בארגומנטציה ובהצדקות. מאמרה של שולה וייסמן מציג שאלות נכון/לא נכון בגיאומטריה כדרך לחשוף את מידת ההבנה של הלומדים. שאלות נכון/לא נכון מאפשרות לאבחן את רמת הידע של הלומד, לחשוף נקודות חולשה ולהרחיב סוגי ידע כגון השוואות בין מושגים ויכולת הנמקה. במאמר מובאות דוגמאות לשאלות מסוג זה, ומוצג הניתוח של התשובות השגויות שענו פרחי הוראה. כמו כן מובאות דוגמאות לאופן השימוש בכלים טכנולוגיים לצורך התמודדות עם שאלות נכון/לא נכון בגיאומטריה.

את השער השלישי סוגר מאמרו של שירן חוף ואילנה לבנברג, שמציג את הדואליות ביחס ובתחושות של פרחי ההוראה כלפי מקצוע הגיאומטריה. פרחי ההוראה נעים בין חרדה מהמקצוע להערכה כלפיו. מצד אחד, הם מייחסים חשיבות לגיאומטריה ותופסים אותה כתחום דעת ייחודי שישפיע על העתיד של הלומדים, אך מצד שני הם חרדים מפניה. החרדה מיוחסת בעיקר לגורמים חיצוניים כמו לחץ חברתי או הדימוי של מקצוע הגיאומטריה כמקצוע קשה, הקושי האובייקטיבי בלמידת המקצוע וההשפעה המכרעת של אופן הוראתו על הצלחת הלומד.

השער הרביעי מוביל אותנו אל ההוראה במאה ה-21. בפתח המאמר של רות סגל ומשה סטופל, שמציגים את הכלי הטכנולוגי הממוחשב כמנוף לגילוי תכונות גיאומטריות מפתיעות של שימור והכללה. מאמרו עוסק במשימת חקר בעזרת התוכנה הדינמית כ"שותפה" בתהליך הלמידה. השימוש בתוכנה מאיץ את תהליכי ההנמקה המתמטית. המשתמש נשען על הידע המתמטי שלו כדי להצדיק את מה שהטכנולוגיה ממחישה. התהליך החוזר ונשנה של בניות, חישובי שטחים שונים, חישוב היחסים ביניהם וההוכחות המתמטיות לצורך הכללה, יצר למידה תוך פעילות חקר שמתרחשים בה גילויים חדשניים. אלה מאיצים תהליכי הנמקה שמובילים להוכחה פורמלית.

במאמר השני, של איליה סיניצקי ומשה סטופל, מוצג רעיון השימור והשינוי ככלי גיאומטרי ודידקטי. הכותבים מתבססים על ההנחה ששימור תכונות מאפיין את הגיאומטריה הדדוקטיבית מרגע בנייתה. עם זאת, הצגת שאלות על שינוי אפשרי והשפעתו על תכונות האובייקטים הגיאומטריים מהווה מקור לטענות וגם משמשת ככלי להוכחתן. הדוגמאות המוצגות במאמר מראות כי הבנת היבטים של שימור ושינוי היא כלי לפתרון בעיות גיאומטריות מגוונות: הבנת השפעת השינוי, גילוי שימור והבניית השינוי המשמר המתאים, סוללים לעתים קרובות את הדרך לפתרון או מקלים את מציאתו. סביבות ממוחשבות מזמנות שלב קודם להוכחת המשפטים, בעזרת בדיקה של דוגמאות רבות, אם כי עדיין גילוי של שימור תכונה ובדיקת קיומו על ידי דוגמאות אינם מחליפים את הוכחת הטענה שמצהירה על שימור זה או אחר.

את השער הרביעי סוגר מאמרו של ליאורה נוטוב ועטרה שריקי, "מעבר לאוקלידס", שעוסק בפרקטלים כמקור לפעילויות חקר בגיאומטריה. המחברות פותחות צוהר להיכרות

עם עולם הפרקטלים והגיאומטריה הפרקטלית שטרם חדרה במלואה לכיתות הלימוד. הן מעודדות שילוב של גיאומטריה פרקטלית בהוראה ויצירת סיטואציות למידה שהתלמידים והמורים לוקחים בהן חלק פעיל בחקר ובגילוי של תופעות חדשות. מדובר בסיטואציות של חקר שמתבצע תוך שותפות אמיתית ומאתגרת. לסיום מוצג תרגום הלכה למעשה של עקרונות הלמידה המומלצים, באמצעות פעילויות בנושא פרקטלים.

השער החמישי הסוגר את הספר מציג את הגיאומטריה במלוא הדרה ומתמקד ביופייה של הגיאומטריה. המאמר הראשון, של ח'רייה מסארוה, איגור ורנר ודאוד בשותי, מציג את השילוב המופלא בין אורנמנטים תרבותיים לבין הוראת התכנים בגיאומטריה. כותבי המאמר מציגים את אופן ההוראה בקורס שעוסק בניתוח ובבנייה של אורנמנטים גיאומטריים מסוגים שונים וברמות קושי שונות. מוצגת למשל נוכחותו של הקסגון באורנמנט מקורי הודי, יהודי, נוצרי ואסלאמי, כאשר בכל תרבות המשמעות הסמלית היא שונה. אופן ההוראה מאפשר פיתוח מיומנויות בנייה של אורנמנטים והוכחת התכונות שלהם באווירה פלורליסטית שמלווה בהעמקה בתכנים הגיאומטריים. כך נחשף יופייה של הגיאומטריה המככבת בכל התרבויות.

את הספר סוגר מאמרו של אלי אפלבוים, שעוסק בגיאומטריה של משטחים מעוקמים, בעיבוד אותות ותמונות ומה שביניהם. הכותב מוביל אותנו בצעדים מדודים מן הגיאומטריה האוקלידית הוותיקה ביותר אל הגיאומטריה הלא-אוקלידית וחדושיה. הוא ממחיש את חשיבות הרחבת הלימוד בתחום הגיאומטריה והנחלת מושגים מתחום הגיאומטריה הלא-אוקלידית כבר בשלבי הלימוד בבית הספר, הן כהכנה להשתלבות בחזית המחקר והתעשייה הטכנולוגית שהמתמטיקה בכלל והגיאומטריה בפרט תופסות בהם מקום מרכזי, והן כדרך להקניית יכולת חשיבה מקורית ותמונת עולם רחבה לכלל הלומדים. "אין דרך מלך לגיאומטריה"³, כפי שאמר בעבר הרחוק אוקלידס. אכן, הגיאומטריה פנים רבות לה, וזה מקור הקושי שבה, אולם גם סוד קסמה. בהיעדר דרך מלך, ננסה להציג שבילים אל מגוון הצורות והגופים הגיאומטריים, ובעיקר ננסה להדביק אתכם, הקוראים, באהבת הגיאומטריה.

3 נדלה מתוך http://www.gogeometry.com/math_geometry_quotes/euclid_math.html

רשימת מקורות

אבן-שושן, א' (עורך). (1993). גיאומטריה. **המילון החדש** (כרך ראשון: 170). ירושלים: קריית ספר.

בן-יהודה, ב' (1960). **הוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון** (חלק שני). תל אביב: מסדה.
ברקאי, ר' ופטקין, ד' (2014). רמות החשיבה בגיאומטריה של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בנושאים שונים בגיאומטריה של המישור והמרחב, בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם. בתוך ד' פטקין וא' גזית (עורכים), **המורה למתמטיקה: מאפייני הכשרה, ידע, הוראה ואישיות של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי** (עמ' 104-121). תל אביב: מכון מופ"ת.

Chacon, I. G. (2003). *Os Efeitos no Estudo da Matematica* (The effects in the learning of mathematics). Porto Alegre: Artmed.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In G. Douglas (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Crowley, M. L. (1987). Van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Montgomery Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12: 1987 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Gutierrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology*, 18, 31-48.

Koester, B. A. (2003). Prisms and pyramids: Constructing three-dimensional models to build understanding. *Teaching Children Mathematics*, 9(8), 436-442.

Leal, J. (2007). *Educational expectations and success: The contribution for the demystification of mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, Portucalense University, Porto.

Levenberg, I., & Patkin, D. (2014). Promoting meaningful learning: Studying mathematics with traffic signs. *International Journal of Learning and Development (IJLD)*, 4(2), 1-8.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pandiscio, E., & Knight, K. C. (2011). An investigation into the van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. *Journals of Research in Education*, 20(1), 45-52.

Patkin, D., & Dayan, E. (2013). The intelligence of observation improving high school students' spatial ability by means of intervention units. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2), 179-195.

Rozen, Y., & Solomon, G. (2007). The differential learning achievements of constructivist technology: Intensive learning environments as compared with traditional ones: A meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research*, 36(1), 1-14.

Sarfaty, Y., & Patkin, D. (2013). The ability of 2nd-graders to identify solids in different positions and to justify their answer. *Pythagoras: Journal for Research in Mathematics Education (AMESA)*, 34(1), 1-10.

Van Hiele, P. M. (1987, June). *Van-Hiele levels: A method to facilitate the finding of levels of thinking in geometry by using the levels in arithmetic*. Paper presented at the conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice, Syracuse University.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.